L3 MASS U1CD35 — Université Paris Diderot

Calcul différentiel — 2012 - 2013

Examen deuxième session

Jeudi 20 juin 2013

Durée : trois heures.

Documents, calculettes et portables non autorisés.
Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.
Le sujet comporte un recto et un verso.

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème de Heine.
2. Énoncer le théorème de point fixe de Picard.
3. Donner la définition d'une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exercice 1. $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$P_n = \sum_{0\leq k\leq n} \frac{1}{k!}X^k \quad \text{et} \quad Q_n = P_n + \frac{1}{n.n!}X^n.$$

1. Justifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, 1]$,
$$0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq Q_{n+1}(t) \leq Q_n(t).$$
3. En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, 1]$,
$$0 \leq P_n(t) \leq P_{n+m}(t) \leq Q_n(t),$$
puis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.
4. On veut montrer par l'absurde que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Supposons donc que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $F \in \mathbb{R}[X]$ dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.
   (a) Prouver que $F(t) \geq 1 + t \geq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.
   (b) Prouver que la suite des polynômes dérivés $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers F dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$,
   $$F(t) - F(0) - \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}s = (F - P_n)(t) - (F - P_n)(0) - \int_0^t (F - P'_n)(s)\,\mathrm{d}s,$$
   puis en déduire que
   $$\|F - F(0) - \int_0^\bullet F(s)\,\mathrm{d}s\| \leq 2\|F - P_n\| + \|F - P'_n\|.$$
   (d) Montrer qu'alors $F' = F$. Conclure.

5. Quel résultat avez-vous démontré ?

Exercice 2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On note pour toute fonction $f \in E$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

On admet que $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$) est une norme sur E et l'on note E_1 (resp. E_∞) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni de la norme $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$).
Enfin, S (resp. T) désigne l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $f \in E$,

$$S(f) = \int_0^1 f(t)\, dt \quad (\text{resp. } T(f) = f(0)).$$

1. Montrer que T et S sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.
2. S est-elle continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$? Sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
   Nota Bene : il est indispensable de justifier soigneusement vos réponses.
3. T est-elle continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$? Sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
   Nota Bene : il est indispensable de justifier soigneusement vos réponses.

Exercice 3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + y^2 - 2y.$$

1. Montrer que $y^2 - 2y \geq \frac{y^2}{2} - 3$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et qu'il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 \geq \frac{x^2}{2} - C_0$.
2. Après avoir vérifié que les ensembles
   $$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 1\}, \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 1\},$$
   sont non vides et que E est borné, montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, qui est atteint dans l'ensemble E.
3. Donner les points critiques de f.
4. Examiner si ces points sont des extrema locaux pour f. En déduire le minimum global de f, ainsi que le(s) point(s) au(x)quel(s) il est atteint.
5. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

   Soit $m > 0$. On souhaite maintenant étudier les minima de f sur l'ensemble
   $$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}, \quad \text{où} \quad g(x,y) = 18(x-m)^2 + (y-1)^2 - 18m^2.$$
6. Montrer que f admet un minimum global sur K.
7. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid 18(x-m)^2 - 18m^2 \leq 0\} = [0, 2m]$ et étudier sur $[0,2m]$ les variations de la fonction
   $$\varphi(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3m.$$
8. Écrire le système (S) donné par le théorème des extrema liés pour la fonction f sur K.
9. Pour $m > 1$, déduire de ce qui précède que (S) a seulement deux solutions, qu'on explicitera.
10. Donner dans ce cas le minimum global de f sur K, ainsi que le(s) point(s) au(x)quel(s) il est atteint.